

01含参函数的单调性讨论

一、含参函数的单调性

再次重申函数的单调性与导函数的关系：

$f(x)$ 在某个区间内单调递增（减）的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ （ $f'(x) \leq 0$ ）且对于该区间的任一子区间导函数都不恒为0，利用这一点，可以解决一些由含参函数单调性确定参数取值范围的问题（恒成立问题）。

【方法通解】含参导数单调性问题，一般都转化为导函数不等式问题，常用分离变量解决。

1. 已知函数在确定区间恒单调，求参数取值范围

【仅教师可见】——此类问题整合为模型其实即为导数大于等于0或小于等于0恒成立。

特别注意，此类问题不要忽略导数等于0这种情况；于此同时，还需要检验导数等于0时的参数是否会导致常函数出现。

例1

1. 若函数 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 6x + 5$ 在 $x \in [1, 2]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围（ ）。

- A. $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = x^3 - 2ax^2 + 6x + 5$,

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 4ax + 6,$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 上满足 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，

$$\therefore 3x^2 - 4ax + 6 \geq 0, 4a \leq 3x + \frac{6}{x}, x \in [1, 2],$$

$$\text{又} \because 3x + \frac{6}{x} \geq 6\sqrt{2}, \text{当且仅当} 3x = \frac{6}{x},$$

即 $x = \sqrt{2}$ （ $x = -\sqrt{2}$ 舍去）时，等号成立；且 $\sqrt{2} \in [1, 2]$ ，

$$\therefore 4a \leq 6\sqrt{2}, a \leq \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$ ，故D正确。

【标注】 【知识点】已知单调性求参数的取值范围

2. 若函数 $f(x) = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{12}\cos 2x + m(\sin x - \cos x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 方法一: $f'(x) = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sin 2x + m(\sin x + \cos x) < 0$

设 $\sin x + \cos x = t$, $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

$$-\frac{5}{6} + \frac{1}{6}(t^2 - 1) + mt < 0,$$

$$g(t) = t^2 + 6mt - 6 < 0,$$

$$\text{满足} \begin{cases} g(-\sqrt{2}) < 0 \\ g(\sqrt{2}) < 0 \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{3} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

方法二: 函数 $f(x) = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{12}\cos 2x + m(\sin x - \cos x)$

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sin 2x + m(\sin x + \cos x),$$

$$\text{令 } \sin x + \cos x = t, (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}),$$

$$\text{则 } \sin 2x = t^2 - 1,$$

$$\text{那么: } y = \frac{1}{6}t^2 + mt - 1,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{则 } h(t) = \frac{1}{6}t^2 + mt - 1 \leq 0 \text{ 在 } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ 恒成立.}$$

$$\text{可得} \begin{cases} h(-\sqrt{2}) \leq 0 \\ h(\sqrt{2}) \leq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{3} - m\sqrt{2} - 1 \leq 0 \\ \frac{1}{3} + \sqrt{2}m - 1 \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } -\frac{\sqrt{2}}{3} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{3},$$

故选 B.

【标注】 【知识点】已知单调性求参数的取值范围

练1

3. 若函数 $f(x) = \ln x + ax$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[-1, +\infty)$

【解析】 由 $f(x) = \ln x + ax$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} + a,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} + a \geq 0 \text{ 在 } x \in (0, 1) \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{x},$$

$$\text{由 } -\frac{1}{x} \in (-\infty, -1),$$

$$\therefore a \geq -1.$$

故答案为： $[-1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】已知单调性求参数的取值范围

4. 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{2x} + \frac{a}{3}$ 在 $(1, 3)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -18]$

【解析】 $f(x) = x - \frac{a}{2x} + \frac{a}{3}$ 的导数 $f'(x) = 1 + \frac{a}{2x^2} = \frac{2x^2 + a}{2x^2}$,

$f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上是减函数，

则 $f'(x) = \frac{2x^2 + a}{2x^2} \leq 0$ 在 $(1, 3)$ 上恒成立，

即 $2x^2 + a \leq 0$ 在 $(1, 3)$ 上恒成立，

$$\therefore \begin{cases} 2 \times 1^2 + a \leq 0 \\ 2 \times 3^2 + a \leq 0 \end{cases}, \text{解得 } a \leq -18,$$

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -18]$.

故答案为： $(-\infty, -18]$.

【标注】 【知识点】已知单调性求参数的取值范围

例2

5. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围 .

【答案】 $a < \frac{1}{2}$.

【解析】 $f'(x) = \frac{2a-1}{(x+2)^2}$, 则问题等价于 $f'(x) = \frac{2a-1}{(x+2)^2} \leq 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上恒成立 .

解得 $a \leq \frac{1}{2}$.

经检验 $a = \frac{1}{2}$ 不满足题意 (此时 $f'(x) = 0$ 恒成立) .

综上， a 的取值范围是 $a < \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】导数与单调性

2. 已知函数在确定区间内存在单调区间，求参数取值范围

【仅教师可见】 ——此类问题整合为模型即为导数大于0或小于0的能成立问题。

特别注意，此类问题要避免带上导数等于0去讨论。

 例3

6. 若函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - 2$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, -2]$ B. $\left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$ C. $\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$ D. $(-2, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax$,

若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 内存在单调递增区间，

则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax > 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 内存在解，

即 $2a > -\frac{1}{x^2}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上有解，

$2a > \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{\min}$,

即 $2a > -4$,

$a > -2$,

故选D .

【标注】 【知识点】 区间上恒单调

 练3

7. 设函数 $f(x) = \ln x + (x - a)^2$, 若函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在单调递增区间，试求实数 a 的取值范围 .

【答案】 $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$

【解析】 方法一：分离

由题意：在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在 x_0 使得 $g(x_0) > 0$,

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 使 $2a < 2x + \frac{1}{x}$ 成立，

即 $2a < \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{\max} = \frac{9}{4}$.

方法二：

(端点效应)

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2(x - a) = \frac{2x^2 - 2ax + 1}{x}$,

令 $g(x) = 2x^2 - 2ax + 1$,

由题意：在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在 x_0 使得 $g(x_0) > 0$,

只需在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上， $g(x)_{\max} > 0$,

$$\begin{aligned} &\text{即} \begin{cases} g(2) > 0 \\ g(\frac{1}{2}) > 0 \end{cases}, \\ &\Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】存在单调增（减）区间

3. 已知函数在确定区间内不单调，求解参数取值范围

【仅教师可见】——此类问题比前两种难度稍大。

连续函数在区间内不是单调函数，那么一般意味着两种情况：一种是函数是常函数；另一种是函数在此区间内同时存在单增和单减区间。

后一种的讨论，其实就等价于我们的导函数在此区间内与 x 轴的交点个数至少有一个，且这个交点要满足左右两侧的导数值异号。

例4

8. 函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 2a$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【解析】 $\because y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 2a$,

$$\therefore y' = x^2 - 2ax + 1,$$

又函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 2a$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，

$\therefore y' = x^2 - 2ax + 1$ 与 x 轴有二不同的交点

(即 $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 2a$ 在 $\mathbf{R}$ 上有增区间，也有减区间)，

$\therefore$ 方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 有二异根，

$$\therefore \Delta = 4a^2 - 4 > 0,$$

$$\therefore a > 1 \text{ 或 } a < -1.$$

故答案为： $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】区间上不单调

【素养】逻辑推理；数学运算

练4

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+2)x + 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调递增函数，那么实数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

【解析】 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = x^2 + 2mx + m + 2$ ，
若 $f(x)$ 不是单调函数，则 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有异号零点。
 $\therefore \Delta = 4m^2 - 4(m + 2) > 0$ 即 $m^2 - m - 2 > 0$ ，
 $\therefore m < -1$ 或 $m > 2$ ，
 $\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ 。

【标注】【知识点】区间上不单调

二、分类讨论判断函数单调性

🔗 分类讨论的用处以及用法

分类讨论思想常用来解决含参函数单调性的问题。

核心方法：求导，研究导函数正负性。

本质：解含参不等式。

核心问题：由于参数（定值）的不同，导致导函数不等式的解集不同，导致原函数单调性不同。

🔗 核心难点

①分类依据：不同的模型分类依据不一样，如何去找出分类的标准。

②讨论顺序：多个模型叠加以后，如何讨论才能不遗不漏，并且计算量比较小。

10. 为避免一级标题下没有题目设置

【是否继续冲刺导数分类讨论】

1. 非常乐意

2. my pleasure

【答案】✓✓

【标注】【知识点】导数

三、一次型问题

1. 参数在一次项系数上（斜率分类）

🔗 例1

【仅教师可见】我们都知道，解不等式最后要和定义域取交集，所以，在有定义域的情况下，有些解集会被舍掉，有些解集会发生改变。

常见隐定义域： $\ln x$ ，分母，根号等。（最重要的是原函数含有 $\ln x$ 型）

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ， a 是常数， $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

【答案】(1) (1) 当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

(2) 当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

(3) 当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上是增数，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 是减函数

【解析】(1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$$

(1) 当 $a = 0$ 时， $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

(2) 当 $a \neq 0$ 时，

$$\text{令 } \frac{1 - ax}{x} = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{a}$$

① 当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

② 当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上是增数，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 是减函数

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

练1

12. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax - 3 (a \in \mathbf{R})$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

【答案】(1) 当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 1]$ ，单调减区间为 $[1, +\infty)$ ；

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $[1, +\infty)$ ，单调减区间为 $(0, 1]$ ；

当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 不是单调函数。

【解析】(1) $f'(x) = \frac{a(1-x)}{x} (x > 0)$ 。

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 1]$ ，单调减区间为 $[1, +\infty)$ ；

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $[1, +\infty)$ ，单调减区间为 $(0, 1]$ ；

当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 不是单调函数。

【标注】【知识点】区间上不单调

2. 参数在常数项上 (截距分类)

例2

13. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x-a}$ (其中 $a < 0$) , 求函数 $f(x)$ 的定义域及单调区间 .

【答案】 定义域为 $\{x|x \neq a\}$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, a)$ 和 $(a, a+1)$.

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq a\}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-a-1)}{(x-a)^2} .$$

由 $f'(x) > 0$, 解得 $x > a+1$.

由 $f'(x) < 0$, 解得 $x < a+1$ 且 $x \neq a$.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, a)$ 和 $(a, a+1)$.

【标注】 【知识点】 求函数单调区间 (含参一次型导函数)

练2

14. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 2$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 ;

【答案】 (1) 当 $a < 0$ 时 , $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时 , $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$, $x > 0$.

当 $a < 0$ 时 , 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时 , 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$.

因为 $x \in (0, a)$ 时 , $f'(x) > 0$; $x \in (a, +\infty)$ 时 , $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 求函数单调区间 (含参一次型导函数) ; 利用导数解决等式能成立或恒成立问题

【题目分析】 【仅教师可见】 ——

① 注意求解定义域 ;

② $e^x > 0$ 恒成立 , 所以可忽略 ;

③注意描述单调递减区间时，由于区间内含有不在定义域内的点，故而应将区间分成两段。

四、二次型问题

二次型，是分类讨论中相当复杂且重要，而且是最常考的一种模型。

二次模型讨论一般顺序：①判别式/是否能因式分解；②两根大小与定义域；③讨论开口方向，画出导数等价图像，判断函数单调性。

1. 参数在二次项系数上

【可因式分解型】

核心分类依据：两根大小。

求根方法：因式分解。

（因为是因式分解求根，所以判定式，必定大于等于0，无需讨论判别式）

例1

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x$ ($a \in R$)。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

【答案】(1) 当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ，单调递减区间为 $(2, +\infty)$ ；

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ， $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(2, \frac{1}{a})$ ；

当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ；

当 $a > \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$ ， $(2, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 2)$ ；

【解析】(1) $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x$ ($x > 0$)，

$$f'(x) = ax - (2a+1) + \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - (2a+1)x + 2}{x} = \frac{(ax-1)(x-2)}{x}$$

当 $a = 0$ 时， $f'(x) = -\frac{x-2}{x}$ ， $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, 2)$ ，单调递减区间为 $(2, +\infty)$ ；

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = 2$ ， $x = \frac{1}{a}$ ；

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ，单调递减区间为 $(2, +\infty)$ ；

当 $a > \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$ ， $(2, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 2)$ ；

当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ；

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ， $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(2, \frac{1}{a})$ ；

综上所述：当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ，单调递减区间为 $(2, +\infty)$ ；

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ ， $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(2, \frac{1}{a})$ ；

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 2)$;

【标注】 【知识点】直接求函数的极值 (不含参); 求函数单调区间 (含参二次型导函数)

练1

16. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + x - \ln(1+x)$, 其中 $a > 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$, $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$;

单调递增区间为: $(0, \frac{1}{a} - 1)$.

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{a} - 1)$, $(0, +\infty)$;

单调递增区间为: $(\frac{1}{a} - 1, 0)$.

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

【解析】 (1) 令 $f'(x) = \frac{-ax(x - \frac{1-a}{a})}{1+x} = 0$, 解得 $x_1 = 0$, 或 $x_2 = \frac{1-a}{a}$.

① 当 $0 < a < 1$ 时, $x_1 < x_2$,

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如表:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{a} - 1)$	$\frac{1}{a} - 1$	$(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$, $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$; 单调递增区间为: $(0, \frac{1}{a} - 1)$.

② 当 $a = 1$ 时, $x_1 = x_2 = 0$, $f'(x) = -\frac{x^2}{1+x} \leq 0$,

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

③ 当 $a > 1$ 时, $-1 < x_2 < 0$,

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, \frac{1}{a} - 1)$	$\frac{1}{a} - 1$	$(\frac{1}{a} - 1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{a} - 1)$, $(0, +\infty)$, 单调递增区间为: $(\frac{1}{a} - 1, 0)$.

综上, 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$, $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$;

单调递增区间为： $\left(0, \frac{1}{a} - 1\right)$.

当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-1, \frac{1}{a} - 1\right)$ ， $(0, +\infty)$ ；

单调递增区间为： $\left(\frac{1}{a} - 1, 0\right)$.

当 $a = 1$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, +\infty)$.

【标注】 **【知识点】** 已知最值情况求参数值或解析式；求函数单调区间（含参二次型导函数）

例2

17. 已知函数 $f(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right)$ ，其中 $a \geq -1$ ，求 $f(x)$ 的单调区间 .

【答案】 答案见解析

【解析】 $f'(x) = ae^{ax} \frac{(x+1)[(a+1)x-1]}{x^2}$ ， $x \neq 0$.

当 $a = -1$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$.

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ ；单调递增区间为 $(-1, 0)$ ， $(0, +\infty)$.

当 $a \neq -1$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$ ，或 $x = \frac{1}{a+1}$.

当 $-1 < a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ ， $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$ ；

单调递增区间为 $(-1, 0)$ ， $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$.

当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 为常值函数，不存在单调区间 .

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0)$ ， $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$ ；

单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ ， $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$.

【标注】 **【知识点】** 利用导数求函数的单调性、单调区间

练2

18. 已知函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

【答案】 答案见解析

【解析】 $f'(x) = (x^2)'e^{ax} + x^2(e^{ax})' = 2xe^{ax} + ax^2e^{ax} = x(ax+2)e^{ax}$

(1) 当 $a = 0$ 时， $f'(x) = 2x$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

单调增区间为 $(0, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\infty, 0)$

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = -\frac{2}{a}$

(2) 当 $a > 0$ 时， $0 > -\frac{2}{a}$ ，

当 $x < -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-\frac{2}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,
 单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$, $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$
 (3) 当 $a < 0$ 时, $0 < -\frac{2}{a}$, 当 $x > -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,
 当 $0 < x < -\frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,
 $\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$, 单调减区间是 $(-\infty, 0)$, $(-\frac{2}{a}, +\infty)$
 综上: 当 $a = 0$ 时, 单调增区间为 $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$
 当 $a > 0$ 时, 单调增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a})$, $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\frac{2}{a}, 0)$
 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, -\frac{2}{a})$, 单调减区间是 $(-\infty, 0)$, $(-\frac{2}{a}, +\infty)$.

【标注】 【知识点】求函数单调区间 (含参指对型导函数)

例3

19. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, +\infty)$,

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$, 单调增区间为 $(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ax - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - 1}{x}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 当 $a < 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 又因为 $x > 0$, 解得 $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$.

① 当 $x \in (0, \sqrt{\frac{1}{a}})$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$ 单调递减.

② 当 $x \in (\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, +\infty)$,

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$, 单调增区间为 $(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$.

【标注】 【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数); 已知最值情况求参数值或解析式

练3

20. 已知函数 $f(x) = -ax^2 + \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in \left(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

【解析】当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2a}} = -\frac{\sqrt{2a}}{2a} < 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a} > 0$,

$\therefore$ 当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

当 $x \in \left(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

【标注】 【知识点】 利用导数求函数的单调性、单调区间

2. 参数不在二次项系数上

例4

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - (1+2a)x + \frac{4a+1}{2}\ln(2x+1)$, $a > 0$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, 2a)$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 减区间为 $(2a, \frac{1}{2})$.

$a = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

$a > \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $(2a, +\infty)$, 减区间为 $(\frac{1}{2}, 2a)$.

【解析】 $f'(x) = x - (1+2a) + \frac{4a+1}{2x+1} = \frac{(2x-1)(x-2a)}{2x+1}$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2a$

① 当 $2a > \frac{1}{2}$, 即 $a > \frac{1}{4}$ 时, 列表如下:

x	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 2a)$	$2a$	$(2a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $(2a, +\infty)$, 减区间为 $(\frac{1}{2}, 2a)$.

② 当 $2a = \frac{1}{2}$, 即 $a = \frac{1}{4}$ 时, $f'(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x+1} \geq 0$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

③ 当 $0 < 2a < \frac{1}{2}$, 即 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, 列表如下:

x	$(-\frac{1}{2}, 2a)$	$2a$	$(2a, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, 2a)$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 减区间为 $(2a, \frac{1}{2})$.

综上所述:

$0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, 2a)$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 减区间为 $(2a, \frac{1}{2})$.

$a = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

$a > \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $(2a, +\infty)$, 减区间为 $(\frac{1}{2}, 2a)$.

【标注】 【知识点】 求函数单调区间 (含参指对型导函数)

练4

22. 已知函数 $f(x) = \frac{x-a}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(1, +\infty)$; $a > 1$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(1, 2a-1)$, $f(x)$ 的减区间为 $(2a-1, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{(x-1)(-x+2a-1)}{(x-1)^4}$, $x \in (1, +\infty)$.

由 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1$, 或 $x_2 = 2a-1$.

① 当 $2a-1 \leq 1$, 即 $a \leq 1$ 时, 在 $(1, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

② 当 $2a-1 > 1$, 即 $a > 1$ 时, 在 $(1, 2a-1)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $(2a-1, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述: $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(1, +\infty)$; $a > 1$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(1, 2a-1)$, $f(x)$ 的减区间为 $(2a-1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 求函数最值 (含参二次型导函数)

例5

23. 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{x}$, (其中 $a \in \mathbf{R}$).

(1) 设 $h(x) = f(x) + x$, 讨论 $h(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $a \geq -2$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < -2$ 时, $h(x)$ 在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递增,

在 (x_1, x_2) 上单调递减.

【解析】 (1) $h(x) = a \ln x - \frac{1}{x} + x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$h'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2},$$

令 $g(x) = x^2 + ax + 1$, 判别式 $\Delta = a^2 - 4$,

当 $\Delta \leq 0$ 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $g(x) \geq 0$, $h'(x) \geq 0$,

此时 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $\Delta > 0$ 即 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时,

$$\text{由 } g(x) = 0 \text{ 得 } x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2},$$

若 $a > 2$, 则 $x_1 < 0$, 又 $x_1 x_2 = 1 > 0$,

所以 $x_2 < 0$, 故 $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

若 $a < -2$, 则 $x_2 > 0$,

又 $x_1 x_2 = 1 > 0$ 所以 $x_1 > 0$,

此时, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h'(x) > 0$,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减;

综上所述, 当 $a \geq -2$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < -2$ 时, $h(x)$ 在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递增,

在 (x_1, x_2) 上单调递减.

【标注】 【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数)

练5

24. 已知函数 $g(x) = \ln x + 2x + \frac{a}{x}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的增区间为 $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}, +\infty\right)$, 减区间 $\left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}\right]$.

【解析】 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 的增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的增区间为 $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}, +\infty\right)$, 减区间 $\left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}\right]$.

【标注】 【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

五、指对型问题

【仅教师可见】

温馨提示: 此类题在茫茫题海中找起来有一点困难, 如果需要更多题目供学生练习, 可以仿照例2, 例4, 练4的出题方式, 将涉及到的常数换一下, 或者将参数整体换为 $\frac{a}{2}, 1 - a$ 等类似形式, 即可得到

全新的题目啦。

1. 指数型

例1 (二阶导问题)

25. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

【解析】 (1) 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$,

导函数为 $f'(x) = \frac{1 + x - e^x}{x^2 e^x}$,

令 $h(x) = e^x - x - 1$, $h'(x) = e^x - 1$,

当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(0) = 0$, 即 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立 .

由已知 $x > 0$, 得 $e^x > x + 1$, $f'(x) < 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

【标注】 【知识点】利用导数求单调性证不等式

例2

26. 若 $f'(x) = (x - 1)(e^x - a)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

【答案】 $a \leq 0$, $f(x) : (-\infty, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$;

$0 < a < e$, $f(x) : (-\infty, \ln a) \uparrow, (\ln a, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$;

$a = e$, $f(x) : (-\infty, +\infty) \uparrow$;

$a > e$, $f(x) : (-\infty, 1) \uparrow, (1, \ln a) \downarrow, (\ln a, +\infty) \uparrow$

【标注】 【知识点】导数与单调性

练2

27. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】 【知识点】求参数范围 (含参指对型导函数)

例3 (类二次型)

类二次型与二次中的可因式分解型也基本相同, 区别在与还有一些指对函数本身的性质.

对数函数: 天生自带定义域.

指数函数: 天生自带值域.

28. 求函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x (a \in \mathbf{R})$ 的单调区间.

【答案】 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 单调递减, 在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 因为 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$,

所以 $f'(x) = 2e^{2x} - ae^x - a^2 = (2e^x + a)(e^x - a)$,

① 当 $a = 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$ 时, $2e^x + a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln a$,

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

③ 当 $a < 0$ 时, $e^x - a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln(-\frac{a}{2})$,

当 $x < \ln(-\frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \ln(-\frac{a}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

综上所述, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 单调递减, 在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 上单调递增.

【标注】 【知识点】求函数单调区间 (含参指对型导函数)

练3

29. 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1) \cdot (2e^x + 1)$.

①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

②若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$,

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】 【知识点】求参数范围 (含参指对型导函数)

2. 对数型

例4

30. 若 $f'(x) = (x-a)(\ln x - 1)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 $a \leq 0$, $f(x) : (0, e) \downarrow, (e, +\infty) \uparrow$;

$0 < a < e$, $f(x) : (0, a) \uparrow, (a, e) \downarrow, (e, +\infty) \uparrow$;

$a = e$, $f(x) : (0, +\infty) \uparrow$;

$a > e$, $f(x) : (0, e) \uparrow, (e, a) \downarrow, (a, +\infty) \uparrow$

【标注】 【知识点】导数与单调性

31. 已知函数 $f(x) = (x^2 - ax) \ln x + \frac{1}{2}x^2$, (其中 $a \in \mathbf{R}$)

(1) 若 $a > 0$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$, $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{e})$ 单调递减.

当 $a = \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $a > \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, \frac{a}{2})$ 单调递减.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = (2x - a) \ln x + (x^2 - ax) \frac{1}{x} + x = (2x - a) \ln x + 2x - a = (2x - a)(\ln x + 1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 即 } (2x - a)(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{1}{e},$$

① 当 $x_1 = x_2$, 即 $\frac{a}{2} = \frac{1}{e}$, $a = \frac{2}{e}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数.

② 当 $x_1 < x_2$, 即 $\frac{a}{2} < \frac{1}{e}$, $0 < a < \frac{2}{e}$ 时,

当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\frac{a}{2}, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

③ 当 $x_2 < x_1$, 即 $\frac{1}{e} < \frac{a}{2}$, $a > \frac{2}{e}$ 时, 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

当 $x \in (\frac{1}{e}, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$, $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{e})$ 单调递减.

当 $a = \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $a > \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, \frac{a}{2})$ 单调递减.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参指对型导函数); 求函数零点(含参指对型导函数)

练4

32. 若 $f'(x) = (x - 1)(\ln x - a)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 $a < 0$, $f(x) : (0, e^a) \uparrow, (e^a, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$;

$a = 0$, $f(x) : (0, +\infty) \uparrow$;

$a > 0$, $f(x) : (0, 1) \uparrow, (1, e^a) \downarrow, (e^a, +\infty) \uparrow$

【标注】【知识点】导数与单调性

六、其他

1. 高次函数型

高次函数型, 本质就是解高次不等式(穿针引线), 画出导函数图像, 讨论即可.

33. 若 $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$, $x \in \mathbf{R}$, 讨论 $f(x)$ 单调性.

【答案】 $a < 1$, $(-\infty, a) \downarrow, (a, 1) \uparrow, (1, 2) \downarrow, (2, +\infty) \uparrow$;
 $a = 1$, $(-\infty, 2) \downarrow, (2, +\infty) \uparrow$;
 $1 < a < 2$, $(-\infty, 1) \downarrow, (1, a) \uparrow, (a, 2) \downarrow, (2, +\infty) \uparrow$;
 $a = 2$, $(-\infty, 1) \downarrow, (1, +\infty) \uparrow$;
 $a > 2$, $(-\infty, 1) \downarrow, (1, 2) \uparrow, (2, a) \downarrow, (a, +\infty) \uparrow$

【标注】 【知识点】导数与单调性

2. 三角函数

34. 已知函数 $f(x) = e^{-x} \sin x + ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$, 求 $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调区间.

【答案】 (1) $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; 递增区间为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

【解析】 (1) $g(x) = f'(x) = a - e^{-x}(\sin x - \cos x)$, 所以 $g'(x) = -2e^{-x} \cos x$.

令 $g'(x) = 0$, $x \in (0, 2\pi)$, 得 $x = \frac{\pi}{2}$, 或 $x = \frac{3\pi}{2}$.

由 $g'(x) < 0$, $x \in (0, 2\pi)$, 得 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 或 $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

由 $g'(x) > 0$, $x \in (0, 2\pi)$, 得 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; 递增区间为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

【标注】 【知识点】直接求函数的单调性 (不含参); 已知极值情况求参数范围